端点控制原理：一次函数不等式的高效代数解法研究

马衍龙

2025 年 6 月 20 日

摘要

本文针对北京市中考数学第 22 题“小代综”题型中的一次函数比大小问题，提出基于端点控制原理的通用代数解法。该方法将函数不等式恒成立问题转化为端点约束条件，显著降低思维难度。通过对比近三年中考真题及模拟题，证明该方法较传统数形结合法具有更强的通用性和相当的运算效率，尤其适合含参问题的系统化求解。

1 问题背景

北京市中考数学第 22 题常出现形式：

给定直线 $y_1 = kx + b$ 与 $y_2 = mx + n$，
求解参数范围使 $\forall x \in (T, S)$ 满足 $Ay_1 + By_2 + C > 0$（或 $y_1 > y_2$ 等特殊形式）

传统解法依赖数形结合，需分析函数图像相对位置，对参数讨论易疏漏。

2 核心定理

端点控制定理： 设一次函数 $y_1 = f(x) = k_1x + b_1$, $y_2 = g(x) = k_2x + b_2$，对任意实数 A, B, C 及区间 (T, S)（允许 $T = -\infty$ 或 $S = +\infty$），有：

$$\forall x \in (T, S),\ Af(x) + Bg(x) + C > 0$$

当且仅当同时满足：

$$Af(T) + Bg(T) + C \geq 0 \tag{1}$$

$$Af(S) + Bg(S) + C \geq 0 \tag{2}$$

其中边界点包含等号（开区间不影响不等式严格性）

证明. 令 $h(x) = Af(x) + Bg(x) + C$ 为一次函数，其图像为直线。
由一次函数单调性 (或者基于一次函数的图像是一条直线)，$h(x)$ 在 (T, S) 上恒正 $\iff$ 这条线段（射线、直线）完整地在 x 轴上方 $\iff$ 它的左右端点不在 x 轴下方，且两个端点之一在 x 轴上方。

□

当 T, S 有限时，直接代入计算即可；
当 $T = -\infty$ 时，可以形式地带入 $T = -\infty$，然后在不等式两边同时除以 ∞（当做一个很大的正数），然后让形如 $\frac{A}{\infty}$（其中 A 是一个有界量）的项为 0，这最终相当于要求 $h(x) \geq 0$ 等价于 x 项系数非正（若系数为 0 则常数项 > 0），$S = +\infty$ 则相反。(算法上来看，就是统一把不等式用端点带入，并换成 $\geq$, 然后对无穷的带入项验证等号是否成立）

3 方法实现

3.1 一般步骤

1. **标准化**：将不等式整理为 $Af(x) + Bg(x) + C > 0$ 形式
2. **求边界**：确定 T, S（有限值或 $\pm\infty$）
3. **列方程**：建立端点约束方程组
4. **解参数**：求解不等式组
5. **合并大前提**：将前提条件中的所有限制加上，进一步约束参数的范围（比如" 一次函数 $y = kx$ 隐含地要求 $k \neq 0$, 一次函数 $y = kx + 2$ 与一次函数 $y = 2x$ 交于某点 A 隐含地要求 $k \neq 2$）.

3.2 特例处理

- $y_1 > y_2 \iff f(x) - g(x) > 0$（取 $A = 1, B = -1, C = 0$）
- $y_1 < k \iff f(x) - k < 0$（取 $A = 1, B = 0, C = -k$）

4 实例分析

4.1 典型例题 1:$y_1 = kx + k, y_2 = -x + 2$, 要求 $y_1 + y_2 > 0$

当 $x > 1$ 时,

$$f(x) = (k-1)x + (k+2) > 0 \tag{3}$$

恒成立，求 k 范围。

解:

由题意知，当 $1 < x < \infty$ 时，(3) 恒成立，取 $T = 1, S = \infty$ 带入:

STEP1：带入 $x = 1$ 时, $f(x) \geq 0$:

$$(k-1) + k + 2 \geq 0 \implies k \geq -\frac{1}{2} \tag{4}$$

STEP2：带入 $x = \infty$ 时, $f(x) \geq 0$:

$$(k-1)\infty + (k+2) \geq 0 \tag{5}$$

$$k - 1 + \frac{k+2}{\infty} \geq 0 \tag{6}$$

$$k - 1 \geq 0 \tag{7}$$

$$k \geq 1 \tag{8}$$

STEP3：对无穷情况验等::

当 $k = 1$ 时，(3) 变为 $3 > 0$，成立，所以可以取等。

综上所述，$k \geq 1$

4.2 典型例题 2: 需要处理两次问题求公共部分

1.（2024北京．中考真题）在平面直角坐标系 xOy 中，函数 $y=kx+b(k\neq 0)$ 与 $y=-kx+3$ 的图象交于点 $(2,1)$．

（1）求 k,b 的值；

（2）当 $x>2$ 时，对于 x 的每一个值，函数 $y=mx(m\neq 0)$ 的值既大于函数 $y=kx+b$ 的值，也大于函数 $y=-kx+3$ 的值，直接写出 m 的取值范围.

解:

(1)$k=1,b=-1$

(2) 由题意知，当 $2<x<\infty$ 时，不等式

$$mx>x-1 \tag{9}$$

$$mx>-x+3 \tag{10}$$

恒成立。

先处理(9)：

STEP1：带入 $x=2$ 时,$mx\geq x-1$：

$$2m\geq 2-1 \implies m\geq \frac{1}{2} \tag{11}$$

STEP2：带入 $x=\infty$ 时,$mx\geq x-1$：

$$m\infty\geq\infty-1 \tag{12}$$

$$m\geq 1-\frac{1}{\infty} \tag{13}$$

$$m\geq 1 \tag{14}$$

STEP3：对无穷情况验等:：

当 $m=1$ 时，(9) 变为 $0>-1$，成立，所以可以取等。

所以，(9) 即 $m\geq 1$

再处理(10)：

STEP1：带入 $x=2$ 时,$mx\geq -x+3$：

$$2m\geq -2+3 \implies m\geq \frac{1}{2} \tag{15}$$

STEP2：带入 $x=\infty$ 时,$mx\geq -x+3$：

$$m\infty\geq -\infty+3 \tag{16}$$

$$m\geq -1+\frac{3}{\infty} \tag{17}$$

$$m\geq -1 \tag{18}$$

STEP3：对无穷情况验等:：

当 $m=-1$ 时，(10) 变为 $0>3$，不成立，所以不可以取等。

所以，(10) 即 $m>-1$

综合以上两个不等式，以及题目条件的 $m\neq 0$ 即可得到最终答案 $m\geq 1$

4.3 典型例题 3：负无穷的处理

1.（2025北京．西城二模）在平面直角坐标系 xOy 中，函数 $y = 2x + m$ 和函数 $y = mx(m \neq 0)$ 的图象交于点 A .

（1）略;

（2）当 $x < 2$ 时，对于 x 的每一个值，函数 $y = 2x + m$ 的值都大于函数 $y = mx(m \neq 0)$ 的值，直接写出 m 的取值范围.

(2) 解:

由题意知，当 $-\infty < x < 2$ 时，不等式

$$2x + m > mx \tag{19}$$

恒成立.

STEP1：带入 $x = 2$ 时, $2x + m \geq mx$:

$$4 + m \geq 2m \implies m \leq 4 \tag{20}$$

STEP2：带入 $x = -\infty$ 时, $2x + m \geq mx$:

$$-2\infty + m \geq -m\infty \tag{21}$$

$$-2 + \frac{m}{\infty} \geq -m \tag{22}$$

$$-2 \geq -m \tag{23}$$

$$m \geq 2 \tag{24}$$

STEP3：对无穷情况验等::

当 $m = 2$ 时，(19) 变为 $2 > 0$，成立，所以可以取等。

所以，(19) 即 $2 \leq m \leq 4$

再结合大前提中 $m \neq 0$, 以及两直线相交，所以 $m \neq 2$

综上可得到最终答案 $2 < m \leq 4$

4.4 典型例题 4: 双参数问题

1.（2025北京．海淀二模）在平面直角坐标系 xOy 中，点 $(2,3)$ 在函数 $y = kx + 1(k \neq 0)$ 的图象上.
(1) 求 k 的值；
(2) 当 $n < x < 2$ 时，对于 x 的每一个值，函数 $y = kx + 1(k \neq 0)$ 的函数值都大于 $y = -2x$ 的函数值，且小于 $y = -2x + b$ 的函数值，直接写出 n 的最小值和 b 的取值范围.
（1）解：$k = 1$；
(2) 解：
由题意知，当 $n < x < 2$ 时，不等式

$$-2x < x + 1 < -2x + b \tag{25}$$

恒成立.
STEP1：带入 $x = 2$ 时,$-2x \leq x + 1 \leq -2x + b$：

$$-4 \leq 2 + 1 \leq -4 + b \implies b \geq 7 \tag{26}$$

STEP2：带入 $x = n$ 时,$-2x \leq x + 1 \leq -2x + b$：

$$-2n \leq n + 1 \leq -2n + b \implies n \geq -\frac{1}{3} \tag{27}$$

STEP3：至少对一个边界验等：不用验，他们的一次项系数不一样
综上可得到最终答案 $b \geq 7$,$n \geq -\frac{1}{3}$

对比：传统作差方法需分 $k-1>0,=0,<0$ 讨论，当 $k-1=0$ 时需单独验证 $k+2>0$，步骤更繁琐。数形结合法需要画函数图像，可能要花不少时间，并且直线斜率之间的比较也不清晰。

5 方法对比

表 1: 方法特性对比

方法	思维复杂度	计算量	通用性
数形结合法	高（需几何直观）	中等（需分类讨论）	有限（依赖图像）
端点控制法	低（纯代数操作）	低（直接列方程）	强（统一框架）

6 教学建议

1. **基础训练**：强化代数计算、合并同类项与标准化变形（如例 1 的 y_1+y_2）
2. **临界认知**：强调“$\geq$”包含函数相切情形
3. **无穷处理**：当 $T=\infty$ 时：

$$\lim_{x\to\infty}(ax+b)>0 \iff \begin{cases} a>0 \\ \text{或} \\ a=0 \text{ 且 } b>0 \end{cases}$$

当 $T=-\infty$ 时：

$$\lim_{x\to-\infty}(ax+b)>0 \iff \begin{cases} a<0 \\ \text{或} \\ a=0 \text{ 且 } b>0 \end{cases}$$

4. **验证机制**：对解集取边界值验证

结论

端点控制原理通过将连续问题离散化，建立了一次函数不等式与边界值的等价关系，具有：

- **普适性**：适用于任意线性组合及有界/无界区间
- **简洁性**：避免分类讨论，降低错误率
- **可操作性**：计算流程标准化，适合考场应用

该方法可作为解决中考“小代综”问题的首选代数工具。

附录：典型习题

习题 1：当 $x \in (-1,3)$ 时，$2kx-(k+1)>3$ 恒成立，求 k 范围。

解答：

$$(2k)x+(-k-4)>0$$

$$\begin{cases}[2k(-1)-k-4]\geq 0 \implies -3k-4\geq 0 \implies k\leq -\frac{4}{3}\\ [2k(3)-k-4]\geq 0 \implies 5k-4\geq 0 \implies k\geq \frac{4}{5}\end{cases}$$

$\Rightarrow$ 无解